



مشکلات درک

مفهوم تابع

فاطمه قاسمی، دبیر ریاضی خرم دره، استان زنجان و کارشناس ارشد آموزش ریاضی
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

آنچه که در این مقاله به شرح آن پرداخته می‌شود، بخشی از یک مطالعه بزرگ‌تر است که تمرکز آن، بر درک تابع توسط دانش‌آموزان پایه ۱۱ رشته ریاضی-فیزیک و نقش کتاب تازه‌تألیف حسابان در شکل‌گیری این درک است.

کلیدواژه‌ها: تابع، پایه ۱۱، رشته ریاضی-فیزیک، کتاب تازه‌تألیف حسابان

مقدمه

نویسنده اول این مقاله-فاطمه قاسمی، در یک مدرسه نمونه دولتی واقع در یکی از شهرستان‌های شمال غرب ایران، در پایه‌های نهم و دهم تدریس می‌کند. در این شهر، تنها یک مدرسه نمونه دولتی دخترانه با رشته ریاضی-فیزیک وجود دارد. به روایت ایشان، دانش‌آموزان اغلب در درک مفهوم تابع و به‌خصوص در رابطه با تعریف تابع، تعیین دامنه تابع و توابع مرکب، مشکل دارند. با این وجود، وی شاهد بوده که بیشتر دانش‌آموزان، برای کسب نمره بهتر در درس ریاضی، مجبور به حفظ کردن مطالب می‌شوند و می‌توانند نمره مطلوب خود را به‌دست آورند. ولی هنگامی که به پایه بالاتر می‌روند، مشکلاتشان بیشتر می‌شود. با این تجربه، در سال تحصیلی ۱۳۹۴-۱۳۹۳، خانم قاسمی تدریس کتاب تازه‌تألیف حسابان را که به عهده وی گذاشته شد، به فال نیک گرفت، زیرا هم زمان با تدریس، تحقیقی طراحی شد که در آن، تدریس مباحث کتاب حسابان جدید، همان‌گونه که در قسمت «سخنی با معلم» این کتاب قید شده، مطابق با روش‌های آموزشی کتاب باشد و در تمام طول تدریس، روند کار مطابق با فعالیت‌ها و تمرین‌های کتاب انجام گیرد. وی بیان می‌کند که «انتظار داشتیم که با محور قرار دادن این کتاب، در تدریس تابع برای دانش‌آموزان رشته ریاضی-فیزیک، مشکلات سال‌های قبل را کمتر مشاهده کنیم.»

پیشینه

پونته (۱۹۹۲) برای نشان دادن اهمیت تابع در ریاضی و توسعه آن، به سیر تحول تاریخی این مفهوم پرداخته است. وی خاطر نشان می‌سازد که ریاضی بخش مهمی از توصیف، توضیح، پیش‌بینی، کنترل و تحلیل پدیده‌ها را تشکیل می‌دهد و تابع مفهومی است که نقش بی‌بدیلی در این فرایند دارد. پونته (۱۹۹۲) در بررسی تحول تاریخی مفهوم تابع، به این نتیجه رسید که این مفهوم، به صورت شانس در ریاضیات پدیدار نشده است و نیازمندی، سبب ابداع این مفهوم شده است. در هر صورت، تابع یکی از اصلی‌ترین مفاهیم برنامه درسی ریاضی است که در «دوره ریاضی جدید»، به عنوان یک مفهوم هماهنگ‌کننده عمل می‌کرد و در برنامه‌های درسی اخیر، ابزاری قوی برای مدل‌سازی ریاضی است (شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا، ۱۹۸۹ و ۲۰۰۰، نقل شده در گویا و امامی، ۱۳۹۲).

پرهیزگار (۱۳۸۷)، به نقل از ساجکا، (۲۰۰۳)، تابع را یکی از مفاهیم اساسی ریاضی می‌داند که گوناگونی تفسیرها و بازنمایی‌هایش، شگفت‌آور است و توجه و زمان زیادی در فرایندهای آموزشی، بر روی آن صرف شده است. اما با وجودی که طیف وسیعی از بازنمایی‌ها برای کمک به درک بهتر مفهوم تابع معرفی شده، هم‌چنان درک آن، با بدفهمی‌های گسترده‌ای همراه است.

به گفته گویا (مریم، ۱۳۸۲)، تابع از جمله مفاهیمی است که دانش‌آموزان مدرسه‌ای نسبت به آن، توانایی‌های متفاوتی ابراز می‌کنند، از یک طرف برخورد رویه‌ای و طوطی‌وار نسبت به تابع، باعث شده است که دانش‌آموزان با انواع نکته‌ها و ریزه‌کاری‌های محاسباتی آن آشنا شوند و از طرف دیگر، شواهد نشان می‌دهد که دانش‌آموزان در درک مفهوم تابع مشکل دارند، زیرا توانایی برقراری رابطه بین ساختار مفهومی و قواعد رویه‌ای تابع را ندارند.

بازنمایی‌های مختلف تابع

روش‌های جدید برای نمایش توابع، در طول توسعه این مفهوم به وجود آمده است. هر کدام از این نمایش‌ها در فهم جنبه‌های خاصی از مفهوم تابع حائز اهمیت است و هر یک به شدت به دیگری وابسته می‌باشد. اما علاوه بر این، بازنمایی‌ها ممکن است گاهی اوقات موجب سردرگمی دانش‌آموزان نیز بشوند (سلدان و سلدان، ۱۹۹۲، نقل شده در جونز، ۲۰۰۶). برای جلوگیری از این وضعیت، آکوک و تال (۲۰۰۳) معتقدند که دانش‌آموزان در صورتی می‌توانند درک بهتری از مفهوم تابع داشته باشند که بتوانند بین بازنمایی‌های مختلف تابع، ارتباط برقرار کنند. اگر امکان داشته باشد که دانش‌آموزان، خودشان تجربه این کشف را داشته باشند که یک ایده، می‌تواند با بازنمایی‌های مختلف اما مشابه ارائه شود، آن‌گاه تعدد بازنمایی‌ها می‌تواند تسهیل‌کننده یادگیری دانش‌آموزان باشد (امامی، ۱۳۹۱ و دافعی، ۱۳۸۹).

معرفی پژوهش

برای شناخت عمیق‌تر درک دانش‌آموزان از مفهوم تابع و نقش کتاب درسی تازه‌تألیف حسابان در شکل‌گیری این درک، مطالعه‌ای با ۱۷ دانش‌آموز که در رشته ریاضی - فیزیک یک دبیرستان دخترانه تحصیل می‌کردند، طراحی شد. ابزار جمع‌آوری داده‌ها در این تحقیق، ۲۶ سؤال در قالب شش آزمون بود که همه آن‌ها، بر مبنای سرفصل‌های کتاب درسی تازه‌تألیف حسابان (۱۳۹۳) بود و بیشتر سؤال‌ها با تمرینات این کتاب، همخوانی داشت. البته، به دلایل مختلفی از کمبود زمان برای انجام آزمون گرفته تا ماهیت و گستردگی مبحث مورد آزمون، تعداد سؤال‌های هر آزمون با دیگری فرق داشت. علاوه بر آزمون‌ها، اگر در تجزیه و تحلیل بعضی پاسخ‌ها، پژوهشگران در مورد صحت برداشت خود از پاسخ‌های دانش‌آموزان دچار تردید می‌شدند، برای رفع آن و شفافیت برداشت‌ها، گفت‌وگوهای شفاهی مورد استفاده قرار گرفت.

شرکت دانش‌آموزان در دو آزمون که بخشی از ارزشیابی کلاسی آن‌ها بود الزامی، و شرکت در چهار آزمون دیگر که در ساعت‌های بعد از کلاس برگزار شدند، داوطلبانه بود. هم‌چنین، به دانش‌آموزان

اطمینان داده شد که نتایج آزمون‌هایی که به صورت داوطلبانه برگزار می‌شوند، تأثیری در نمرات کلاسی آن‌ها نداشته و تنها در صورت تمایل ایشان، از آن داده‌ها استفاده خواهد شد. پس از خواندن متن رضایت‌نامه در کلاس توسط معلم/ پژوهشگر (نویسنده اول)، دانش‌آموزان نیز رضایت خود را به‌طور شفاهی اعلام کردند.

نتایج

برای تجزیه و تحلیل داده‌ها، سؤال‌های شش آزمون دوباره با هم در یک مجموعه قرار گرفتند و با توجه به اشتراک موضوعی و سؤال تحقیق، در پنج دسته جدید سازماندهی شدند. سپس داده‌های هر دسته، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفتند. تجزیه و تحلیل داده‌ها با در نظر گرفتن شباهت‌ها و تفاوت‌های موجود در پاسخ‌ها صورت گرفت. در این بخش، نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل داده‌های یکی از دسته‌ها، ارائه می‌شود. هدف از طراحی سؤال‌های این دسته، بررسی درک دانش‌آموزان از مفاهیم تابع یک‌به‌یک و تابع وارون بود که مطابق با مباحث زیر، از فصل دوم کتاب درسی تازه‌تألیف حسابان به شرح زیر بود:

• توابع یک‌به‌یک و تابع وارون، صص ۸۸-۸۶؛

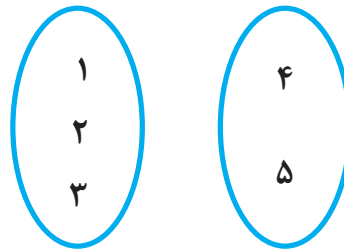
• محاسبه تابع وارون، ص ۸۹؛

• یافتن ضابطه تابع وارون، صص ۹۴-۹۰.

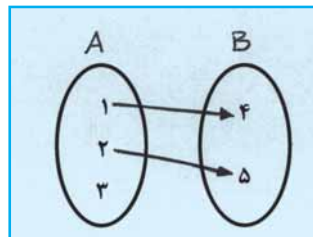
در ادامه، یافته‌های حاصل از تجزیه و تحلیل سؤال‌های این دسته به تفکیک و به اختصار، ارائه می‌شود.

سؤال ۱: اگر مجموعه‌های A و B به شکل زیر داده شده باشند، تابعی یک‌به‌یک از A به B

تعریف کنید.

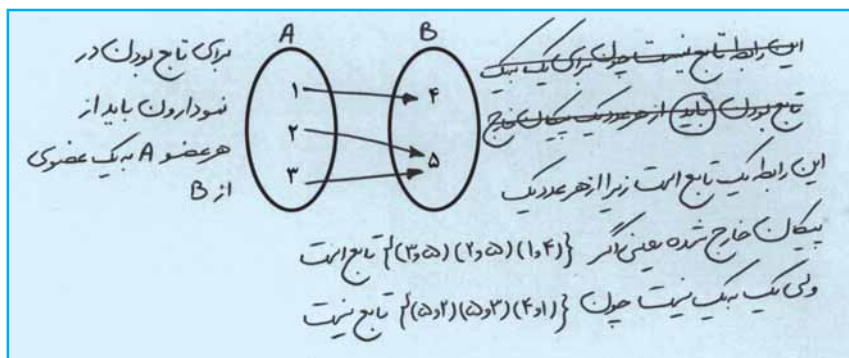


در صورت این سؤال، مجموعه A و B مشخص نشده بود، زیرا انتظار این بود که همان گونه که در کتاب درسی عنوان شده، دانش‌آموزان با استفاده از نمودار ون، مجموعه اول را دامنه و مجموعه دوم را هم‌دامنه در نظر بگیرند و بیان کنند که نمی‌توان در این حالت، تابعی یک‌به‌یک تعریف کرد. ولی برخلاف این انتظار، از ۱۶ دانش‌آموزی که به این سؤال پاسخ دادند، تنها یک نفر به این موضوع اشاره کرده بود. هشت نفر هم از مجموعه سه‌عضوی، دو عضو را به مجموعه دو‌عضوی نظیر کرده بودند و به تابع بودن رابطه، توجهی نکرده بودند. نمونه‌ای از پاسخ‌های نادرست در زیر آمده است:

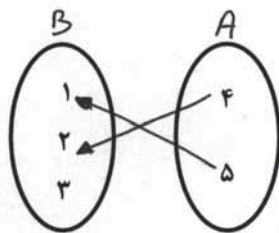


آکوک و تال
 (۲۰۰۳) معتقدند
 که دانش‌آموزان در
 صورتی می‌توانند
 درک بهتری از
 مفهوم تابع داشته
 باشند که بتوانند
 بین بازنمایی‌های
 مختلف تابع،
 ارتباط برقرار کنند

پاسخ مورد نظر به این سؤال به صورت زیر بود:



هفت نفر دیگر نیز مانند نمونه زیر، مجموعه دو عضوی را دامنه و مجموعه سه عضوی را هم دامنه فرض کرده و بدین ترتیب، به این سؤال پاسخ درست داده بودند.



از تجزیه و تحلیل پاسخ‌های داده شده به این سؤال، نتایج زیر به دست آمد:

- دانش‌آموزان در برخورد با مسائل ترکیبی ناتوان بودند و نتوانستند هم‌زمان، هم «تابع بودن» و هم «یک‌به‌یک بودن» را بررسی کنند.
- اکثر دانش‌آموزان، تعریف‌ها را حفظ کرده بودند و کاربرد آن‌ها را به درستی نمی‌دانستند.
- بعضی از دانش‌آموزان، مجموعه دوم را دامنه فرض کردند، و با اینکه بارها و بارها در حل مسائل مربوط به نمودار ون، همواره مجموعه اول را به عنوان دامنه گرفته و در تعریف‌های خود از تابع نیز به این مطلب اشاره داشتند، اما در این مورد، آن را رعایت نکردند. این‌ها از جمله کسانی بودند که وقتی با مسئله‌ای مواجه می‌شوند که قابل حل نیست و مانعی برای حل آن وجود دارد، بدون تأمل، آن مانع را برمی‌دارند.
- در حالی که این سؤال می‌توانست به خوبی در کتاب حسابان، مطرح شود و در تمرین در کلاس صفحه ۴۵ نیز که نمودارهای ون بسیاری برای تشخیص تابع بودن رسم شده، بهتر بود که در تعدادی از آن‌ها، به «یک‌به‌یک بودن» هم اشاره شود.

سؤال ۲: در مورد یک‌به‌یک بودن تابع زیر بحث کنید.

$$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3 + |x|}{x}$$

از ۱۷ دانش‌آموز پاسخ‌دهنده به این سؤال، چهار نفر پاسخ درست و ۱۳ نفر پاسخ نادرست دادند. دانش‌آموزانی که به پاسخ درست رسیده بودند؛ از روش جای‌گذاری دو نقطه و پیدا کردن Y ‌های متمایز، یا دو ضابطه‌ای کردن تابع و بررسی یک‌به‌یک بودن در هر یک از ضابطه‌ها، استفاده کردند. دو نمونه معرف، از پاسخ‌های نسبتاً درست دانش‌آموزان، در صفحه بعد آمده است:

اگر چه این دو پاسخ تا حدودی درست هستند و نشان می‌دهد که این دو دانش‌آموز، به یک‌به‌یک بودن تابع پی برده‌اند، ولی کامل نیستند.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x} = \frac{x}{x} - 1 & x < 0 \\ \frac{x+2}{x} = \frac{x}{x} + 1 & x > 0 \end{cases} \quad f(-1) = \frac{f}{-1} = -f \\ f(1) = \frac{f}{1} = f$$

در مورد یک‌به‌یک بودن تابع زیر بحث کنید.

$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x+|x|}{x}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\begin{cases} \frac{x_1+|x_1|}{x_1} = \frac{x_2+|x_2|}{x_2} \\ \frac{x_1}{x_1} + \frac{|x_1|}{x_1} = \frac{x_2}{x_2} + \frac{|x_2|}{x_2} \end{cases}$$

چون دامنه تابع $f(x)$ ، $\mathbb{R} - \{0\}$ است
در نتیجه اعداد مثبت منفرجه می‌توانند
در $f(x)$ قرار بگیرند. یک‌به‌یک است

$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad D \rightarrow x > 0$

$$f(x) = \frac{x+|x|}{x} \quad y_1 = y_2 \rightarrow \frac{x_1+|x_1|}{x_1} = \frac{x_2+|x_2|}{x_2} \rightarrow x_2(x_1+|x_1|) = x_1(x_2+|x_2|)$$

$$x_2 x_1 + x_2 |x_1| = x_1 x_2 + x_1 |x_2| \rightarrow x_2 |x_1| = x_1 |x_2| \rightarrow x_2 = x_1$$

یک‌به‌یک است.

$D \rightarrow x < 0$

$$\frac{x_1-|x_1|}{x_1} = \frac{x_2-|x_2|}{x_2} \rightarrow x_2(x_1-|x_1|) = x_1(x_2-|x_2|)$$

$$x_2 x_1 - x_2 |x_1| = x_1 x_2 - x_1 |x_2| \rightarrow -x_2 |x_1| = -x_1 |x_2| \rightarrow x_2 = x_1$$

یک‌به‌یک است.

هم‌چنین در زیر، نمونه‌ای از پاسخ‌های نادرست ارائه شده است:

$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x+|x|}{x} \rightarrow \frac{x_1+|x_1|}{x_1} = \frac{x_2+|x_2|}{x_2} \rightarrow \frac{x_1+|x_1|}{x_1} = \frac{x_2 \pm x_2}{x_2}$$

$$\frac{x_1+|x_1|}{x_1} = \frac{|x_2|}{x_2} \rightarrow x_1+|x_1| = |x_2|$$

چون این تابع دارای شرط است پس یک‌به‌یک نیست

به‌طور کلی، در پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال، نکات زیر حائز اهمیت بود:

• دانش‌آموزان اطلاعات کافی در مورد یک‌به‌یک بودن تابع داشتند، ولی هنگام استفاده از تعریف، دچار مشکل شدند.

• بیشتر دانش‌آموزانی که به این سؤال پاسخ نادرست دادند، به دلیل شکل قدرمطلقى سؤال بود، زیرا تأکید تمرین‌های کتاب درسی، بر این است که توابع قدرمطلقى، یک‌به‌یک نیستند و طبیعى است که اکثر دانش‌آموزان در مواجهه با تابعی که قسمتی از آن قدرمطلقى است، به تبعیت از آن تمرین‌ها، پاسخ نادرست دهند.

• هیچ‌یک از دانش‌آموزان در تعیین یک‌به‌یک بودن توابع چندضابطه‌ای، به برد تابع توجه نکردند و فقط به دامنه و ضابطه توجه نمودند. این موضوع نیز در کتاب درسی، مورد غفلت قرار گرفته است.

سؤال ۳: آیا تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x > 2 \\ 7x-2, & x \leq 2 \end{cases}$ وارون‌پذیر است؟ توضیح دهید.

از ۱۶ دانش‌آموز پاسخ‌دهنده به این سؤال، تنها یک نفر پاسخ درست داد و نه نفر پاسخ نادرست دادند. چهار نفر هم با وجود تلاشی که کردند، به نتیجه‌ای نرسیدند و دو نفر، هیچ پاسخی ندادند. دانش‌آموزی که پاسخ درست داده بود، به روش رسم تقریبی نمودار به جواب رسیده بود.

پاسخ‌های نادرست ناشی از این بدفهمی بود که دانش‌آموزان استدلال کرده بودند که «چون هر کدام از ضابطه‌ها خطی هستند و توابع خطی هم یک‌به‌یک هستند، پس این تابع نیز یک‌به‌یک است». در حقیقت، ریشه این بدفهمی این بود که این دانش‌آموزان، بیشتر به شکل ضابطه‌ها که خطی بود توجه کرده بودند و یک‌به‌یک بودن هر ضابطه را در دامنه خود بررسی نموده و توجهی به برد تابع نکرده بودند و به این علت، به پاسخ نادرست رسیده بودند. یک نمونه از پاسخ‌های نادرست، در زیر آمده است:

اگر امکان داشته باشد که دانش‌آموزان، خودشان تجربه این کشف را داشته باشند که یک ایده، می‌تواند با بازنمایی‌های مختلف اما مشابه ارائه شود، آن‌گاه تعدد بازنمایی‌ها می‌تواند تسهیل‌کننده یادگیری دانش‌آموزان باشد (امامی، ۱۳۹۱ و دافعی، ۱۳۸۹)

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x > 2 \\ 7x-2, & x \leq 2 \end{cases}$ وارون پذیر است؟ توضیح دهید.

این تابع را در دو بخش برای اشتراک آن عنصر است و هر خطی
مطابق برکتشم نمودار تابع را در یک
نقطه قطع می کند.

$$y = 3x + 1 \rightarrow 3x = y - 1 \rightarrow x = \frac{y-1}{3}$$

$$7x - 2 = y \rightarrow 7x = y + 2 \rightarrow x = \frac{y+2}{7}$$

تصویر زیر هم یکی از راه حل هایی را نشان می دهد است که دانش آموز، به جواب نرسیده است:

$$y = 3x + 1 \rightarrow 3x = -1 + y \rightarrow x = \frac{y-1}{3} \rightarrow y = \frac{x-1}{3}$$

$$7x - 2 = y \rightarrow 7x = y + 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{7} \rightarrow y = \frac{x+2}{7}$$

در واقع، هیچ یک از دانش آموزان نمی دانستند که برای یک به یک بودن تابع چندضابطه ای، باید اشتراک برد هر ضابطه با ضابطه های دیگر، تهی باشد. این مطلبی است که در کتاب درسی به آن پرداخته نشده است. همچنین، سؤال های مربوط به این قسمت طوری طراحی شده اند که دانش آموزان، می توانند تنها با توجه به دامنه و ضابطه تابع، به پاسخ درست برسند. در نتیجه، نیازی به دقت بیشتر، برایشان ایجاد نشده است.

سؤال ۴: وارون تابع زیر را در صورت وجود، بیابید.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$f(x) = 2x - |x + 1|$$

از ۱۷ دانش آموز پاسخ دهنده، تنها سه نفر به این سؤال پاسخ درست دادند و پاسخ ۱۴ نفر، قابل قبول نبود. از این ۱۴ نفر، یک نفر نموداری پیوسته رسم کرده و نوشته بود که «تابع وارون پذیر است»، ولی وارون را محاسبه نکرده بود. سه نفر نیز ضابطه وارون را نادرست محاسبه کرده بودند. ده نفر هم پاسخ نادرست یا بی نتیجه داده بودند. در کل، نتیجه ای را که از تجزیه و تحلیل پاسخ های دانش آموزان به این سؤال حاصل شد، می توان به صورت زیر، جمع بندی کرد:

- دانش آموزان توجهی به اینکه دامنه تابع اعداد طبیعی است، نکردند و حتی آن هایی که پاسخ درست دادند، نمودار را به شکل پیوسته رسم کردند.
- دانش آموزانی که پاسخ نادرست دادند، به شکل قدر مطلق تابع توجه کردند و به جواب نادرست رسیدند که این نتیجه، مؤید نتیجه سؤال ۲ همین دسته است. در واقع دانش آموزان معتقد بودند که توابع قدر مطلق، نمی توانند یک به یک باشند.
- در صفحه ۴۶ کتاب درسی (تصویر زیر)، جایی که برای اولین بار دانش آموزان را با نمادگذاری جدید آشنا می کند، این مطلب تنها در چند سطر بیان شده است و مثال های کاربردی برای آن، بیان نشده است در حالی که این مبحث برای دانش آموزان جدید است و نیازمند آموزش بیشتر و عمیق تری است.

به طور کلی اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می نویسیم: $f: A \rightarrow B$

این نمادگذاری نشان می دهد که f تابعی با دامنه A و مقادیر در B است، ولی ضابطه f در این نمادگذاری مشخص نمی شود و جداگانه باید ارائه شود. به طور مثال تابع g داده شده در فعالیت صفحه قبل را می توان به یکی از صورت های زیر نمایش داد:

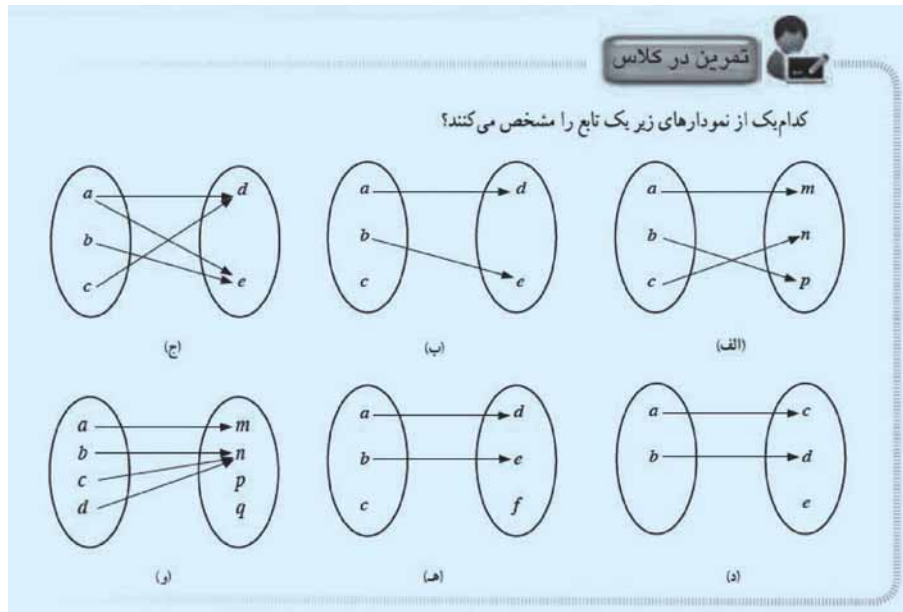
$$g: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{یا} \quad g: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$$

(الف) $g(x) = x^2$ (ب) $g(x) = x^2$

در هر دو نمایش دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی منفی (\mathbb{R}^-) است و در طرف چپ پیکان آمده است. اما در نمایش (الف) هم دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی مثبت (\mathbb{R}^+) است که در طرف راست پیکان آمده است و در نمایش (ب) هم دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی است که در طرف راست پیکان آمده است. در نمایش دوم به جای مجموعه اعداد حقیقی هر مجموعه دیگری را که شامل برد تابع باشد را نیز می توان نوشت.

ولی در صفحه ۴۵، روی شکل نمودار ون تأکید شده و این در حالی است که دانش آموزان در سال

گذشته، به وفور با نمودار ون آشنايي پيدا کرده بودند. تصوير اين صفحه نيز در زير آمده است:



هیچ یک از دانش آموزان نمی دانستند که برای یک به یک بودن تابع چند ضابطه‌ای، باید اشتراک برد هر ضابطه با ضابطه‌های دیگر، تهی باشد. این مطلبی است که در کتاب درسی به آن پرداخته نشده است

نتایج این بخش نشان داد که بهتر بود به جای تأکید روی نمودار ون، بر روی نمادگذاری جدید تمرکز می‌شد و به این مطلب، از طریق مثال‌های بیشتر و متنوع‌تری پرداخته می‌شد. مثلاً رابطه‌هایی مانند $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

ارائه شده و از دانش آموزان درباره تابع بودن یا نبودن آن، سؤال می‌شد.

جمع‌بندی

یافته‌های حاصل از تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش آموزان به چهار سؤال که در یک دسته واقع شدند، به اضافه مشاهدات کلاسی نویسنده اول و گفت‌وگوهای شفاهی وی با دانش آموزان، نشان داد که اکثر دانش آموزان در موارد زیر، دارای مشکل بودند:

- برقراری ارتباط و اتصال بین دانش قبلی و دانش جدید
- دیدن بازنمایی‌های مختلف یک تابع به صورت یک کل منسجم
- به کار بردن دانش کسب شده به دلیل رویه‌ای و حافظه-محور بودن یادگیری
- تعیین دامنه توابع مختلف
- بیش‌تعمیمی مسائل مطرح شده در کتاب درسی
- باور به اینکه می‌توان برای تمام توابع ضابطه تعریف کرد و آن‌ها را با نمودار نمایش داد.
- حل مسائل مربوط به توابع چندضابطه‌ای و توابع مرکب
- انتقال بین بازنمایی‌های مختلف تابع.

این تحقیق، با هدف بررسی درک دانش آموزان پایه سوم ریاضی یکی از دبیرستان‌های نمونه دولتی در شمال غرب کشور، انجام شد. در انجام این تحقیق، کتاب درسی تازه‌تألیف حسابان، محور آموزش مفهوم تابع قرار گرفت و این مبحث، مبتنی بر توصیه‌های منتشر شده مؤلفان آن، تدریس شد.

به گفته این مؤلفان، رویکرد اصلی کتاب حسابان در آموزش مفاهیم جدید، رویکرد حل مسئله است و در اکثر آن‌ها، ذکر شده که هدف، آموزش یک مفهوم جدید است. با این وجود، در فصل دوم کتاب، هیچ موردی از حل مسئله وجود ندارد و عمدتاً شروع هر مبحث، با عنوانی تحت عنوان مثال، تمرین در کلاس و فعالیت است که از لحاظ ماهیت، عملاً تفاوتی با هم ندارند. ولی انجام تمام این بخش‌ها در کلاس، وقت زیادی را به

خود اختصاص می‌دهد که به نظر می‌رسد در حالی که مؤلفان، مباحثه و موشکافی را جزو هدف‌های کتاب برشمرده‌اند، ولی در عمل، به این مقوله کمتر توجه داشته‌اند. زیرا در گفت‌وگوهایی که با بسیاری از دبیران ریاضی انجام شد، همگی ابراز داشتند که زمان اختصاص داده شده به درس حسابان کافی نیست و آن‌ها به ناچار، از روی مباحث به سرعت می‌گذرند و همین باعث می‌شود که مفاهیم اساسی در ذهن دانش‌آموزان خوب جای نگیرد که این امر، یک تناقض است.

علاوه بر این، بسیاری از مطالب فصل اول و فصل دوم کتاب حسابان، با اینکه ارتباط تنگاتنگی با هم دارند، ولی به صورت گسسته از هم بیان شده‌اند و این نوع سازمان‌دهی، باعث می‌شود که این ارتباط، در ذهن دانش‌آموزان کمرنگ شود. در واقع، دانش‌آموزان تصورشان این است که مطالبی که در فصل‌های جداگانه بیان می‌شوند، از لحاظ ماهیت نیز با هم متفاوتند و به همین دلیل، در حل مسائلی که به صورت ترکیبی از دو قسمت مطرح می‌شوند، دچار بدفهمی و مشکل می‌گردند. به نظر می‌رسد مطالبی که مکمل هم هستند، اگر به صورت پیوسته در یک فصل بیان شوند، درکشان برای دانش‌آموزان آسان‌تر می‌شود. هم‌چنین، تأکید زیاد روی مطالب سال قبل و رد شدن سریع از روی مطالب جدید نیز، یکی دیگر از مواردی است که در این کتاب مشهود است و معلم و دانش‌آموز را با مشکل مواجه می‌کند. در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که کتاب درسی، هم در پیدایش تصورات درست و هم نادرست در ذهن دانش‌آموزان، نقشی اساسی دارد. در واقع، در تألیف کتاب‌های درسی، بدیهی است که نظرات معلمان و نیازهای دانش‌آموزان در نظر گرفته شود و با توجه به آن، گام‌های اساسی جهت بهبود وضعیت موجود برداشته شود. به گفته گویا (۱۳۷۵)، در ایران به دلیل تمرکز نظام آموزشی و کمبود رسانه‌های متنوع آموزشی، کتاب درسی از اهمیت سرنوشت‌سازی برخوردار است. در واقع، یکی از قوی‌ترین ابزار اعتلای آموزش ریاضی در ایران، تهیه برنامه درسی، ریزمواد مناسب درسی و تألیف کتاب‌های درسی ریاضی متناسب، با توجه به نیازهای مختلف علمی و آموزشی و اجتماعی است. انتظار می‌رود که برنامه‌ریزان و مؤلفان کتاب‌های درسی به این مسئله واقف باشند تا با رعایت تمام جنبه‌ها، به این امر خطیر بپردازند.

منابع

1. Akkoc, H. & Tall, D. (2003). The Function Concept: Comprehension and Complication, Proceedings of the Day Conference of British Society of Research on Learning of Mathematics, Sheffield Hallam University, UK, 1- 6.
2. Jones, M. (2006). Demystifying Function: The Historical and Pedagogical Difficulties of the Concept of the Function. Published in Mathjournal, vol 7. No. 2, pp.1-19.
3. Ponte, J. P. (1992). The History of the Concept of Function and Some Educational Implications. Mathematics Educator, volume 3. Number 2.
4. امامی، علی. (۱۳۹۱). بررسی تأثیر بازنمایی‌های مختلف تابع بر فهم دانش‌آموزان دوم دبیرستان از تابع، با تأکید بر کتاب درسی ریاضی ۲ تازه‌تألیف. پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.
5. اصلاح‌پذیر، بهمن و همکاران. (۱۳۹۳). حسابان. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
6. ایرانمنش، علی و همکاران. (۱۳۹۲). ریاضی (۲). ۲۳۴/۲.
- دستر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۷. پرهیزگار، بی‌بی زکیه. (۱۳۸۷). درک دانش‌آموزان از مفهوم اصلی تابع، پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.
۸. دافعی، حمید. (۱۳۸۹). بازنمایی‌های چندگانه در آموزش ریاضی. مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۱۰۰، صص ۷۵-۷۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۹. گویا، زهرا و امامی، علی. (۱۳۹۲). بازنمایی‌ها و نقش آن در درک مفهوم تابع. مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۱۱۴، صص ۳۵-۲۴. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۱۰. گویا، زهرا. (۱۳۷۵). ضرورت تغییر برنامه درسی. مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۴۶، صص ۱۲-۸. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۱۱. گویا، مریم. (۱۳۸۲). مفهوم تابع و بدفهمی‌های دانش‌آموزان. مجله رشد آموزش ریاضی. شماره ۷۲، صص ۳۰-۲۳. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.